非負行列集合で定義されるhomogeneous写像の性質 (最適化の基礎理論と応用)

進藤, 晋

数理解析研究所講究録
第 1879 巻 2014 年 44-47

非負行列集合で定義される homogeneous 写像の性質

神奈川大学・工学部　進藤　晋
Susumu Shindoh
Faculty of Engineering, Kanagawa University

1　はじめに

非負行列に関する Perron Frobenius 理論 [2], [5] は，制御理論や経済学等で応用されている．一方，Perron Frobenius 理論の非線形理論への拡張 [6] も進展している．

本研究の目的は，非線形 Perron Frobenius 理論を通して，非負行列集合により定義される homogeneous 写像のいくつかの性質を紹介することである．

2　Perron Frobenius の定理

$M(d)$ を $d\times d$ 実行列空間とし，その部分集合である $d\times d$ 非負行列集合を $N(d)$ とする． このとき，$N(d)$ は $M(d)$ の閉凸錐となる．

$A\in N(d)$ を非負行列という，$A\in N(d)$ で各成分がすべて正となる行列を正行列という．

正方行列 A の固有値の集合を

$$\sigma(A)=\{\lambda\in C:Ax=\lambda x, x\in C^{d}\backslash\{0\}\}$$

とし，そのスペクトル半径を

$$r(A)=max\{|\lambda|:\lambda\in\sigma(A)\}$$

で定義する．

$A\in N(d)$ が reducible であるとは，$d\times d$ 置換行列 P が存在して，

$$P^{T}AP=\begin{pmatrix} B & C\\ 0 & D\end{pmatrix}$$

と表されることをいう．ここで，B および D は正方行列，0 はゼロ行列，P^{T} は P の転置行列である．行列が reducible でないとき，irreducible であるという．

Perron Frobenius の定理は，非負行列 A がスペクトル半径 $r(A)$ を固有値に持つことを主張する [2].

定理 1 (Perron Frobenius の定理) $A\in N(d)$ は *irreducible* であるとする．このとき，以下が成り立つ．

(1) $r(A)\in\sigma(A)$

(2) $r(A)$ は A の固有方程式の単純根

(3) $A \neq 0$ ならば，$r(A) > 0$

(4) $r(A)$ に対する固有ベクトル v の成分は，すべて正にとれる

(5) A の任意の非負固有ベクトルは v の定数倍となる

Perron Frobenius の定理から，以下のことがわかる．

d 次元実ユークリッド空間 R^d の部分集合 R^d_+ を，$R^d_+ = \{x = (x_1, \cdots, x_d) : x_i \geq 0, i = 1, \cdots, d\}$ で定義する．このとき，R^d_+ は R^d 上の内点をもつ閉凸錐となる．

$A \in N(d)$ に対して，写像 $f : R^d \to R^d$ を $f(x) = Ax$ $(x \in R^d)$ で定義すると，写像 f は，R^d_+ を不変にする写像，すなわち，$f(R^d_+) \subset R^d_+$ となる．さらに，f は，定数倍を除いて一意な固有ベクトル $v \in int(R^d_+)$ をもつ．ここで，$int(R^d_+)$ は R^d_+ の内部を表す．

3 Homogeneous 写像

非線形 Perron Frobenius 理論は，上の定理 1 をより一般な凸錐上に拡張する [6]．本論文では，R^d の閉凸錐 R^d_+ を扱う．

$x, y \in R^d$ に対して，$x \leq y$ を $y - x \in R^d_+$，すなわち，すべての $i (i = 1, \cdots, d)$ に対して，$x_i \leq y_i$ で定義する．このとき，$\leq$ は R^d 上の半順序となる．

$x, y \in R^d$ とする．$f : R^d_+ \to R^d_+$ に対して，$0 \leq x \leq y$ ならば，$0 \leq f(x) \leq f(y)$ を満たすとき，f は順序を保存するという．$\alpha > 0, x \in R^d_+$ に対して，$f(\alpha x) = \alpha f(x)$ を満たすとき，f は homogeneous であるという．

homogeneous な写像 $f : R^d_+ \to R^d_+$ に対して，$\|f^m\| = sup\{\|f^m(x)\| : x \in R^d_+, \|x\| \leq 1\}$ が定義できる．ここで，f^m は，f による m 回の合成写像，$\|\cdot\|$ は R^d 上のノルムを表す．

4 例

$\mathcal{A} = \{A_1, \cdots, A_p\}$ を，p 個の $d \times d$ 非負行列からなる集合とする．本節では，Bellman[1]，Bondarenko[3] らが考察した以下の写像を扱う．

$$x_{n+1} = f_{\mathcal{A}}(x_n), \quad n \in N_0$$

ここで，$f_{\mathcal{A}}$ は，$f_{\mathcal{A}}(x) = max_{A \in \mathcal{A}} Ax$ で定義される写像である．max は成分ごとの最大値を意味する．N_0 は非負整数集合，$x_n \in R^d (n \in N_0)$ である．

上記のシステムは，任意の $x_0 \in R^d_+$ に対して，$x_n \in R^d_+$ $(n \in N_0)$ を与える．したがって，$f_{\mathcal{A}}$ は，R^d_+ から R^d_+ への写像とみなすことができる．

このシステムは，近年活発に研究されている discrete switched positive linear system [4] の一種と考えることができる．

$\{1,2,\cdots,d\}$ の任意の部分集合 U と，任意の $A_i, A_j \in \mathcal{A}$ に対して，行列 $C \in N(d)$ を

$$C^{k-th\ row} = \begin{cases} A_i^{k-th\ row} & k \in U \\ A_j^{k-th\ row} & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義する．ここで，$A_i^{k-th\ row}$ は A_i の第 k 行を表す．すべての部分集合 U，すべての $A_i, A_j \in \mathcal{A}$ で生成された行列 C の集合を $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ で表す．このとき，

$$f_{\mathcal{A}}(x) = f_{\mathcal{P}(\mathcal{A})}(x)$$

が成り立つ．

以下では，$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathcal{A})$ を仮定する．この仮定は，product property[3] とよばれている．

ここで，$f_{\mathcal{A}}$ に関するいくつかの結果を与える（詳細は省略する）．

命題 1

(1) $f_{\mathcal{A}}(x)$ は *homogeneous*，すなわち，任意の $t > 0$ に対して，$f_{\mathcal{A}}(tx) = tf_{\mathcal{A}}(x)$ を満たす．

(2) $f_{\mathcal{A}}(x)$ は *convex*

(3) $x, y \in R_+^d$ かつ $x \leq y$ ならば，$f_{\mathcal{A}}(x) \leq f_{\mathcal{A}}(y)$

(4) $r(f_{\mathcal{A}}) = lim_{m\to\infty} \|f_{\mathcal{A}}^m\|^{1/m}$ が存在する．

(5) すべての正整数 k に対して，$r(f_{\mathcal{A}}^k) = r(f_{\mathcal{A}})^k$

(6) ある $x \in R_+^d \backslash \{0\}$ に対して，$f_{\mathcal{A}}(x) = \lambda x$ ならば，$\lambda \leq r(f_{\mathcal{A}})$

(7) $\mathcal{A}$ に属するすべての行列が *irreducible* ならば，$f_{\mathcal{A}}$ は固有ベクトル $v \in int(R_+^d)$ をもつ

[**注意**]　Bondarenko は，$g_{\mathcal{A}}(x) = min_{A\in\mathcal{A}} Ax$ で定義される写像についても議論している [3].

5　今後の課題

非線形 Perron Frobenius 理論は，いろいろな分野に応用可能と思われる．例えば，Doan 等が，論文 [4] で扱っている positive switched system に対する Lyapunov 関数と Collatz Wielandt 集合の関係など，理論および応用の両面から，さらに拡張する必要がある．

[**謝辞**] 本研究は，科研費補助金（基盤C，No.22510161）から一部支援を受けた．

参考文献

[1] Bellman, R. : On a quasi-linear equation, Canad. J. Math., No. 8, pp.198 - 202, (1956)

[2] Berman, A. and R.J. Plemmons : *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, SIAM (1994)

[3] Bondarenko, I. : Dynamics of piecewise linear maps and sets of nonnegative matrices, Linear Algebra and its Applications, Vol. 431, Issues 5-7, pp.495 - 510, (2009)

[4] Doan, T.H. et al. : A constructive approach to linear Lyapunov functions for positive switched systems using Collatz Wielandt sets, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. 58, No. 3, pp.748 - 751, (2013)

[5] Horn, R.A. and C.R.Johnson : *Matrix Analysis*, Cambridge University Press (2011)

[6] Lemmens, B. and R. Nussbaum : *Nonlinear Perron Frobenius Theory*, Cambridge University Press (2012).